ПРИЗНАК НЕКОМПАКТНОСТИ СЛОЕНИЯ МОРСОВСКОЙ ФОРМЫ

И. А. Мельникова

В статье изучаются слоения на гладких компактных многообразиях, определяемые замкнутой 1-формой с морсовскими особенностями. Задача об изучении топологической структуры поверхностей уровня таких форм была поставлена С.П.Новиковым в работе [1]. Этот вопрос изучался в работах [2]–[5]. В данной статье исследуется проблема существования некомпактного слоя, доказан признак некомпактности слоения в терминах степени иррациональности формы ω, показано, что некомпактность слоения является случаем общего положения.

Рассмотрим компактное многообразие M и определенную на нем замкнутую 1-форму ω с морсовскими особенностями. Замкнутая форма ω определяет на множестве $M-\operatorname{Sing}\omega$ слоение коразмерности 1. Соответственно, на M определено слоение с особенностями, получаемое присоединением к $M-\operatorname{Sing}\omega$ особых точек, обозначим его $\mathscr{F}_\omega$. Будем говорить, что слой $\gamma\in\mathscr{F}_\omega$ является компактным, если он является неособым компактным слоем, либо может быть компактифицирован добавлением особых точек. Слоение $\mathscr{F}_\omega$ называется компактным, если все его слои компактны.

Определение 1. Рассмотрим γ – неособый компактный слой $\mathscr{F}_\omega$ – и отображение $\gamma\to[\gamma]\in H_{n-1}(M)$. Тогда образ множества компактных слоев при этом отображении порождает подгруппу в $H_{n-1}(M)$. Обозначим ее H_ω.

Слоение $\mathscr{F}_\omega$ характеризуется тем, что если $\gamma,\gamma'\in\mathscr{F}_\omega$, то $\gamma\cap\gamma'=\varnothing$. Рассмотрим группу $H_{n-1}(M)$ и операцию пересечения гомологических классов

$$H_{n-1}(M)\times H_{n-1}(M)\to H_{n-2}(M).$$

Если γ, γ' – неособые компактные слои $\mathscr{F}_\omega$, то $[\gamma]\circ[\gamma']=0$.

Определение 2. Рассмотрим такую подгруппу $H\subset H_{n-1}(M)$, что $x\circ y=0\ \forall\, x,y\in H$. Назовем H изотропной подгруппой относительно операции пересечения циклов. Изотропная подгруппа H называется *максимальной*, если $\forall\, x\notin H\ \exists\, y\in H\mid x\circ y\neq 0$. Ранг максимальной изотропной подгруппы обозначим $h_0(M)$.

Очевидно, подгруппа компактных слоев H_ω является изотропной подгруппой в $H_{n-1}(M)$. Можно показать, что $h_0(M)$ определяется неоднозначно. Обозначим максимальное значение $h_0(M)$ через $h_0^{\max}(M)$.

Определение 3 [1]. Степенью иррациональности формы ω называется величина

$$\operatorname{dirr}\omega=\operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}\left\{\int_{z_1}\omega,\dots,\int_{z_m}\omega\right\}-1,$$

где $z_1,\dots,z_m$ – базис в $H_1(M)$.

В работе [1] было показано, что если $\operatorname{dirr}\omega=0$, то слоение $\mathscr{F}_\omega$ компактно. В статье [6] был доказан следующий признак некомпактности слоения на M_g^2.

Теорема 2 [6]. *Если* $\operatorname{dirr}\omega\geqslant g$ *на* M_g^2, *то слоение* $\mathscr{F}_\omega$ *имеет некомпактный слой.*

Докажем обобщение этой теоремы на многообразие произвольной размерности.

Теорема. *Если на многообразии M слоение $\mathscr{F}_\omega$ определяется морсовской формой ω и $\operatorname{dirr}\omega\geqslant h_0^{\max}(M)$, то слоение $\mathscr{F}_\omega$ имеет некомпактный слой.*

Доказательство. Пусть слоение $\mathscr{F}_\omega$ компактно. Рассмотрим неособый слой $\gamma\in\mathscr{F}_\omega$. Поскольку $\omega\big|_\gamma=0$, то в некоторой окрестности γ форма точна: $\omega=df$ и слои $\mathscr{F}_\omega$ – это уровни функции f. В окрестности, где $\operatorname{grad}f\neq0$ (т.е. форма ω неособа), все слои диффеоморфны. Таким образом, каждый неособый слой γ обладает окрестностью, состоящей из диффеоморфных ему слоев.

Обозначим максимальную из таких окрестностей $\mathscr{O}(\gamma)$. Эта окрестность представляет собой цилиндр с образующей γ: $\mathscr{O}(\gamma)=\gamma\times\mathbb{R}$. Рассмотрим ее замыкание $V=\overline{\mathscr{O}(\gamma)}$. Край V содержит, по крайней мере, одну критическую точку формы ω. Пусть γ' – еще один неособый компактный слой $\mathscr{F}_\omega$. Очевидно, цилиндры $\mathscr{O}(\gamma)$ и $\mathscr{O}(\gamma')$ либо не пересекаются либо совпадают, при этом $V\cap V'\subset\partial V\cup\partial V'$.

Поскольку ω – морсовская форма и M – компактное многообразие, то особых точек конечное число. Следовательно, число различных цилиндров $\mathscr{O}(\gamma)$ тоже конечно. Таким образом, многообразие M, на котором задано компактное слоение, представимо в виде:

$$M = \bigcup_{i=1}^{N} \mathscr{O}(\gamma_i) \bigcup_{k=1}^{K} \gamma_k^0 \bigcup_{j=1}^{I} p_j,$$

где p_j – особые точки формы ω, γ_k^0 – особые слои $\mathscr{F}_\omega$.

Обозначим $V_i = \overline{\mathscr{O}(\gamma_i)}$ и $T = \bigcup_{i=1}^{N} \partial V_i$. Очевидно, что $p_j \in T$ и $\gamma_k^0 \in T$. Тогда $M = \bigcup_{i=1}^{N} V_i$, причем $V_i \cap V_j \subset T$.

Исследуем связь гомологий $H_1(M)$ и представления $M = \bigcup_{i=1}^{N} V_i$. Используя точную последовательность Майера–Виеториса, можно показать, что $H_1(M) = \langle i_{k*}H_1(V_k), D[\gamma_k], k = 1, \dots, N\rangle$, где $i_k \colon V_k \to M$. Поскольку $V_k = \overline{\mathscr{O}(\gamma_k)}$, $\partial V_k \cap \operatorname{Sing}\omega \neq \varnothing$ и форма ω локально является точной, то, рассмотрев перестройку Морса в особой точке, получим $H_1(M) = \langle j_{k*}H_1(\gamma_k), D[\gamma_k], k = 1, \dots, N\rangle$, где $j_k \colon \gamma_k \to M$ вложение.

Вычислим периоды формы ω. Достаточно рассмотреть $z \in H_1(\gamma_i)$ и $z = D[\gamma_i]$. Очевидно, что $\int_z \omega = 0\ \forall z \in H_1(\gamma_i)$, так как $\gamma_i \in \mathscr{F}_\omega$. Следовательно, на M могут быть отличны от нуля только интегралы по циклам, трансверсальным γ_i: $z_i = D[\gamma_i]$, $i = 1, \dots, N$. При этом, число интегралов $\int_{z_i} \omega$, независимых над $\mathbb{Q}$, очевидно, не превосходит числа независимых классов $[\gamma_i]$, т.е. $\operatorname{rk} H_\omega$. Таким образом, на многообразии M

$$\operatorname{dirr}\omega = \operatorname{rk}_{\mathbb{Q}}\left\{\int_{z_1} \omega, \dots, \int_{z_k} \omega\right\} - 1,$$

где $k = \operatorname{rk} H_\omega$. Следовательно, $\operatorname{dirr}\omega \leqslant \operatorname{rk} H_\omega - 1 \leqslant h_0^{\max}(M) - 1$. Теорема доказана.

Нетрудно показать, что $h_0(M_g^2) = g$, и тогда теорема 2 [6] непосредственно следует из доказанной теоремы.

Рассмотрим морсовские формы общего положения.

Следствие. *Если на многообразии M пересечение $(n-1)$-мерных гомологических классов не тождественно нулевое, то слоение формы общего положения имеет некомпактный слой.*

Доказательство. Поскольку пересечение гомологических классов не тождественно нулевое, то $h_0(M) < \beta_1(M)$. Форма общего положения имеет максимальную степень иррациональности $\operatorname{dirr}\omega = \beta_1(M) - 1$. Следовательно, $\operatorname{dirr}\omega \geqslant h_0(M)$ и, согласно теореме, слоение $\mathscr{F}_\omega$ имеет некомпактный слой. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] Новиков С. П. // УМН. 1982. Т. 37. №5. С. 3–49. [**2**] Новиков С. П. // Труды МИАН. 1984. Т. 166. С. 201–209. [**3**] Зорич А. В. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. №6. С. 1322–1344. [**4**] Ле Т. К. Т. // Матем. заметки. 1988. Т. 44. №1. С. 124–133. [**5**] Алания Л. А. // УМН. 1991. Т. 46. №3. С. 179–180. [**6**] Мельникова И. А. // Матем. заметки. 1993. Т. 53. №3. С. 158–160.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Принято редколлегией
08.12.1994